Une nouvelle géométrie aléatoire

par **Jean-François LE GALL**, Membre élu dans la discipline « Mathématique »

Avant de vous parler de mes propres recherches en théorie des probabilités, je voudrais commencer par quelques mots sur l'histoire de ce domaine des mathématiques. L'histoire des probabilités commence aux seizième et dix-septième siècles avec le mathématicien italien Cardano, et surtout la fameuse correspondance entre Pascal et le chevalier de Méré. Ce dernier qui, selon une lettre de Pascal à Fermat, "avait très bon esprit mais n'était pas géomètre" posa à Pascal plusieurs problèmes relatifs aux jeux de hasard, dont celui de savoir si on a plus de chances d'obtenir un six en lançant 4 fois un dé, ou d'obtenir un double six en lançant 24 fois deux dés. Pascal, et aussi Fermat, prirent au sérieux les questions du chevalier de Méré et y apportèrent des solutions élégantes. De nombreux mathématiciens fameux s'intéresseront ensuite à ce qu'on appelle alors le calcul des probabilités et établirons des résultats importants : la célèbre loi des grands nombres, qui affirme dans un cas particulier que la proportion du nombre d'occurences de pile dans une longue suite de lancers de pile ou face se rapproche de 1/2, sera établie par Jacob Bernoulli et généralisée par d'autres. En dépit de ces progrès, les probabilités restent une sorte de parent pauvre des mathématiques (et sont souvent assimilées à une partie de la physique) jusqu'au début du vingtième siècle, faute de fondements axiomatiques rigoureux.

Tout change en 1933 lorsque le grand mathématicien russe Kolmogorov met à profit la récente invention de la théorie de la mesure pour fonder les probabilités sur une axiomatique puissante, qui est utilisée aujourd'hui par la quasi-totalité des spécialistes. Malgré cela, la théorie des probabilités restera longtemps objet de suspicion pour de nombreux mathématiciens : le génial Paul Lévy, l'un des plus grands noms de la théorie des probabilités, ne sera élu dans la section de mathématiques de l'Académie des sciences qu'à l'âge avancé de 78 ans. Pourtant, le formalisme de Kolmogorov permet aujourd'hui de considérer toutes sortes d'objets mathématiques dépendant du hasard, avec un très grand nombre d'applications. Le meilleur exemple en est sans doute le mouvement brownien mathématique, qui est une courbe dépendant du hasard, rendant compte du phénomène étudié par de grands physiciens comme Albert Einstein et Jean Perrin. Pour donner une idée intuitive de ce qu'est le mouvement brownien, on imagine un marcheur se déplaçant dans un très grand parc et effectuant à chaque seconde un pas dans l'une des quatre directions possibles, Nord, Sud, Est ou Ouest, choisie au hasard à chaque fois. Si l'on observe le déplacement du marcheur sur une longue période de temps, disons quelques heures, et dans une échelle convenable, on verra une courbe aléatoire qui est proche de celle du mouvement brownien en dimension deux. Le mouvement brownien est ainsi une sorte de prototype idéal de courbe purement aléatoire.

Mes premiers travaux de recherche ont traité diverses propriétés de la courbe du mouvement brownien, concernant notamment les recoupements de cette courbe avec elle-même : par exemple, on montre que le mouvement brownien dans le plan passe une infinité de fois en certains points, et mes travaux ont permis de mieux comprendre ce phénomène. Je dois ici rendre hommage à mon ancien directeur de thèse Marc Yor, qui malheureusement nous a quittés en janvier dernier. C'est lui qui par son enthousiasme communicatif avait su me convaincre de m'intéresser à l'objet mathématique fascinant qu'est le mouvement brownien.

Ma recherche récente porte sur la géométrie aléatoire : il ne s'agit plus maintenant d'étudier une courbe dépendant du hasard, comme le mouvement brownien, mais toute une géométrie avec une notion de distance entre deux points quelconques de l'espace. L'une des motivations vient à nouveau de la physique théorique, et plus particulièrement de ce qu'on appelle la théorie de la gravité quantique en dimension deux. Comment construit-on cette géométrie aléatoire ? Imaginons une sphère, par exemple la surface de notre Terre où les océans auraient disparu, sur laquelle se trouvent un grand nombre de villes. Ces villes sont reliées entre elles par des routes, chaque ville étant reliée à un petit nombre (3 ou 4 par exemple) d'autres villes. Deux routes ne peuvent se croiser qu'en une ville, et il est toujours possible d'aller d'une ville à une autre en enchaînant un certain nombre d'étapes. Si on se donne deux villes A et B, on définit la distance entre A et B comme étant proportionnelle au nombre minimal de villes que l'on doit traverser pour aller de la ville A à la ville B - de manière imagée, on peut penser que les trajets sur les routes sont très rapides, mais que la traversée des villes prend beaucoup de temps. Il existe un procédé mathématique précis pour choisir de manière complètement aléatoire les routes entre les villes, et on obtient ainsi une notion de distance aléatoire entre deux villes quelconques. Si le nombre des villes est très grand, on peut considérer que tout point de la sphère est très proche d'une ville et on obtiendra une géométrie aléatoire sur la sphère : cela conduit au modèle mathématique appelé la carte brownienne (carte comme une carte géographique ou routière, et brownienne à cause de liens importants avec le mouvement brownien) dont j'ai montré, avec d'autres chercheurs, l'existence et l'unicité. Ce sujet est un lieu de rencontres très fructueuses entre mathématiciens probabilistes, spécialistes de combinatoire et de théorie des graphes, et physiciens théoriciens. A l'instar du mouvement brownien, la carte brownienne est un objet extraordinaire, dont je suis sûr qu'il continuera longtemps à passionner les mathématiciens. Au-delà des mathématiques, en rappelant que les géométries non euclidiennes découvertes par Riemann ont permis à Einstein d'inventer la théorie de la relativité, on peut rêver un peu et espérer que ces nouvelles géométries aléatoires fourniront de nouvelles clés pour comprendre le monde quantique qui nous entoure.