Cérémonie de réception des nouveaux membres – Le 23 juin 2015

Contrôlabilité et stabilisation

Jean-Michel CORON, *membre de l'Académie des sciences*

Chères consœurs, chers confrères, chers amis et chers collègues,

C'est un grand honneur et une grande joie pour moi d'être reçu dans cette prestigieuse Institution. Je voudrais commencer ce discours par quelques mots personnels. Bien sûr, je dois beaucoup à mes parents et je les remercie à cette occasion pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. En 1982, j'ai rencontré Claire et je veux lui dire cette phrase de Victor Hugo « Aimer, c'est avoir dans les mains un fil pour toutes les épreuves, un flambeau pour tous les chemins, une coupe pour tous les fleuves ». Quant à nos cinq enfants, je ne saurais trop les remercier pour tout le bonheur qu'ils m'apportent chaque jour.

Pour ce qui est de mon parcours scientifique, j'aimerais d'abord remercier mon professeur de mathématiques de Première et Terminale, Pierre Coulomb, qui m'a fait découvrir cette science. À l'École polytechnique, j'hésitais beaucoup entre une carrière d'ingénieur et la recherche. Des enseignants exceptionnels m'ont fait pencher vers cette dernière voie. Je voudrais citer ici Alain Bensoussan, Ivar Ekeland, Roland Glowinski, Paul Malliavin, Luc Tartar et surtout Haïm Brezis. C'est sous la direction de Haïm que j'ai fait ma thèse et j'ai énormément bénéficié de son enseignement, de ses conseils, de ses encouragements et de son soutien constant, tant pendant ma thèse qu'après. J'ai commencé ma recherche dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires. Au début des années 90, sous l'influence de Brigitte d'Andréa-Novel, Georges Bastin, Laurent Praly et Pierre Rouchon que je veux ici remercier, j'ai bifurqué vers la théorie du contrôle, le thème dont je vais parler maintenant.

Un système de contrôle est un système sur lequel on peut agir à l'aide d'une commande ou contrôle. Comme exemples typiques, on peut citer une voiture sur laquelle on agit grâce aux pédales d'accélérateur et de frein ou en tournant le volant ; un satellite, sur lequel on agit à l'aide de poussées délivrées par des tuyères ; un manche de balai que l'on tient au-dessus de son index, le contrôle étant la force appliquée par l'index sur ce manche ; une poussette ou un chariot de supermarché, le contrôle étant les forces que l'on applique sur les cannes de la poussette ou sur la barre du chariot avec nos deux mains. L'état du système dans ces exemples est la position et la vitesse. Ces systèmes sont modélisés par des équations différentielles ordinaires : l'état du système n'a qu'un nombre fini de composantes. Mais il existe aussi des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles : l'état du système est alors de dimension infinie. Comme exemples, on peut citer un bac avec de l'eau dedans, le contrôle étant la force appliquée au bac ; ou l'eau dans les rivières, le contrôle étant le mouvement des portes aux extrémités des biefs. Deux problèmes importants se présentent : la contrôlabilité et la stabilisation.

Le problème de la contrôlabilité est celui de savoir si, en partant d'un état donné arbitraire, on peut atteindre, à l'aide d'un contrôle dépendant du temps bien choisi, un état désiré, arbitraire aussi. C'est un problème dont l'étude a commencé avec les travaux de Rudolph Kalman sur les systèmes linéaires au début des années 60. Le critère de Kalman donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire de dimension finie soit contrôlable. Les systèmes courants ne sont pas linéaires. Mais la contrôlabilité des systèmes linéaires est très utile pour comprendre la contrôlabilité des systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre, c'est-à-dire un état et un contrôle tel que, si on part de cet état et on utilise ce contrôle, alors on ne bouge pas. Pour analyser une courbe près d'un point, on l'approche par une droite qui est la tangente à la courbe en ce point : on remplace la courbe par son développement à l'ordre 1 au point. On suit la même stratégie pour le système de contrôle : on fait un développement à l'ordre 1 de la dynamique autour de de l'équilibre. On obtient un système linéaire, appelé linéarisé au point d'équilibre. On vérifie ensuite que, si le linéarisé est contrôlable, alors le système non linéaire est localement contrôlable, c'est-à-dire que, si deux états sont proches de l'état d'équilibre, on peut aller du premier état au second état en utilisant un contrôle, dépendant du temps, proche du contrôle d'équilibre. Cette stratégie, simple mais puissante, peut s'appliquer à de nombreux systèmes ; par exemple au balai sur l'index, à l'eau dans la rivière. Mais cela ne s'applique pas à la poussette, au chariot de supermarché ou à la voiture quand le point d'équilibre est le repos, au satellite avec peu de tuyères, au bac d'eau quand il se déplace sur une droite horizontale. Pour ces systèmes, le linéarisé n'est pas contrôlable et on ne peut rien en conclure quant à la contrôlabilité, même locale, du système non linéaire. Pour analyser ces cas, l'outil principal en dimension finie est celui des crochets de Lie itérés. C'est un peu ce que l'on fait quand on essaie de garer sa voiture : on fait une série de manœuvres compliquées qui nous permettent de nous déplacer latéralement, un déplacement qui n'est pas possible pour le système linéarisé. On ne connait pas de condition à la fois nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité locale. Toutefois on connait de nombreuses conditions suffisantes et de nombreuses conditions nécessaires de contrôlabilité locale reposant sur ces crochets de Lie itérés, et ces crochets de Lie donnent aussi des informations sur la contrôlabilité globale. En particulier la poussette et la voiture sont contrôlables. Pour ce qui est du satellite, si on s'intéresse au contrôle de son orientation, quand les tuyères délivrent trois couples les linéarisés autour des équilibres sont contrôlables et donc le satellite est localement contrôlable. Si, suite à une panne par exemple, les tuyères ne délivrent que deux couples, les linéarisés autour des équilibres ne sont plus contrôlables mais les crochets de Lie itérés permettent de montrer que le satellite reste contrôlable : les non linéarités du système donnent la contrôlabilité.

Pour ce qui est des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles (comme le bac d'eau ou les rivières mentionnés plus haut), les crochets de Lie itérés marchent souvent très mal ou plutôt on ne sait pas comment les utiliser car ils nous font bouger dans des directions qui ne sont pas dans l'espace des états. Aussi on est un peu désarmé quand le linéarisé n'est pas contrôlable ou quand on cherche des résultats globaux de contrôlabilité en présence de non linéarités importantes. Au début des années 90, j'ai introduit une méthode permettant de traiter certains cas. Supposons que le linéarisé autour du point d'équilibre qui nous intéresse ne soit pas contrôlable. On va chercher des trajectoires du système partant du point d'équilibre et retournant au point d'équilibre ayant un linéarisé contrôlable. Si de telles trajectoires existent, on peut en déduire la contrôlabilité

locale du système non linéaire autour du point d'équilibre en considérant de nouveau un développement à l'ordre 1, maintenant non pas autour du point d'équilibre, mais autour de la trajectoire à linéarisé contrôlable. C'est ainsi que j'ai montré la contrôlabilité des équations d'Euler des fluides incompressibles. Pour cette équation, cette méthode, par des changements d'échelles, donne en fait la contrôlabilité globale : on peut aller de n'importe quel état à n'importe quel autre en n'importe quel temps. Cette méthode donne aussi des résultats même dans le cas où le linéarisé autour du point d'équilibre est contrôlable. En effet, dans ce cas, le développement à l'ordre 1 nous donne l'existence de deux voisinages de l'équilibre tels que, si un premier état est dans le premier voisinage et un second état est dans le second voisinage, on peut aller du premier état au second à l'aide d'un contrôle bien choisi. Mais il est possible que ces deux voisinages soient petits et que l'on puisse trouver des voisinages bien plus grands en considérant d'autres trajectoires allant de l'équilibre à l'équilibre et ayant un linéarisé contrôlable. C'est ainsi que j'ai montré la contrôlabilité globale des équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles quand on agit sur tout le bord du domaine du fluide.

Trouver des trajectoires allant de l'équilibre à l'équilibre est parfois difficile. Bien sûr il est facile de quitter l'équilibre. Ce qui est difficile c'est d'y revenir. J'ai donné, dans le cadre du bac d'eau, une méthode permettant la construction de tels retours. Elle repose sur des déformations lentes par des contrôles bougeant lentement. Cela m'a permis de montrer la contrôlabilité du bac d'eau en dimension 1 d'espace, bien que, de nouveau, le linéarisé autour de l'équilibre ne soit pas contrôlable : ce linéarisé ne permet de contrôler que la moitié de l'état du système. Par exemple, pour le linéarisé, on ne peut pas détruire les vagues, alors que c'est possible avec les non linéarités du système.

Le second problème, celui de la stabilisation du système de contrôle, peut être facilement compris à l'aide de l'expérience classique du balai que l'on veut faire tenir sur son doigt. On met le manche du balai à la verticale sur son doigt, la brosse étant en haut. Si on ne bouge pas le doigt, lentement puis plus rapidement, le balai va s'éloigner de la verticale et finira par tomber. Ceci parce que l'équilibre est instable. Pour éviter que le balai ne tombe, on bouge le doigt en fonction de la position et de la vitesse du balai. On applique ainsi au balai une « loi de rétroaction » ou « feedback » (la force appliquée par le doigt sur le balai) de façon à rendre stable un équilibre instable en l'absence du feedback. Ce feedback dépend de l'état du système, comme on le comprend en recommençant l'expérience avec les yeux fermés.

Le problème naturel de stabilisation qui se pose est alors le suivant : si un système est localement contrôlable autour d'un point d'équilibre, existe-t-il un feedback qui stabilise ce point d'équilibre ? La réponse est oui pour les systèmes linéaires, comme montré par Murray Wonham en 1967. On en déduit que la réponse est aussi oui quand le linéarisé au point d'équilibre est contrôlable. Par contre la réponse est non en général : comme montré par Héctor Sussmann en 1979 et par Roger Brockett en 1983, il existe de nombreux systèmes qui sont contrôlables et qui ne sont pas stabilisables. Pour pallier ce problème, une stratégie est d'utiliser des feedbacks qui dépendent non seulement de l'état mais aussi du temps, comme montré d'abord par Eduardo Sontag et Héctor Sussmann en 1982 pour les systèmes où l'état est de dimension 1 et par Claude Samson en 1991 pour le système de la poussette. J'ai démontré que la plupart des systèmes localement contrôlables étaient stabilisables par

des feedbacks dépendant du temps. C'est, par exemple, le cas pour l'orientation du satellite en mode dégradé mentionné plus haut.

Les résultats précédents de stabilisation concernent des systèmes modélisés par des équations différentielles ordinaires. Pour la stabilisation des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles, on ne dispose que de résultats très partiels sur les liens entre contrôlabilité et stabilisation quand le linéarisé n'est pas contrôlable. J'ai construit des feedbacks stabilisant l'équation d'Euler des fluides incompressibles, un système contrôlable mais à linéarisé non contrôlable, et des systèmes hyperboliques, et en particulier les équations de Saint-Venant qui régissent l'évolution de la hauteur d'eau et des vitesses de l'eau dans des rivières. Ces derniers travaux ont été conduits avec Brigitte d'Andréa-Novel, Georges Bastin, Valérie Dos Santos, Jonathan de Halleux et Christophe Prieur. Les feedbacks que nous avons construits sont actuellement utilisés pour la régulation des rivières La Sambre et La Meuse en Belgique.

Je vous remercie pour votre attention.