Entropie, mélange et régularité

Cédric Villani, membre de l'Académie des sciences

Chers consoeurs et confrères,
Chers collègues et amis,
Mesdames et Messieurs,

A partir de 1865, une révolution scientifique émergeait de la passionnante partie de ping-pong intellectuel que se livraient James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann : c'était la naissance de la physique statistique, l'idée que le monde est fait de particules microscopiques en nombre gigantesque; et que l'on peut, comme le dirait plus tard Jean Perrin, expliquer des observations complexes par des phénomènes invisibles simples, se situant à l'échelle microscopique.

Remplacer la vision d'un fluide immobile, comme l'air qui nous entoure, par un chaos phénoménal de particules invisibles se cognant en tous sens a très grande vitesse, cela relevait pour certains de la poésie plus que de la science, et de célèbres savants dont nous tairons les noms se sont vivement opposes a cette "théorie atomique" naissante.

Dans un ouvrage que le grand probabiliste Marc Kac a décrit comme l'un des plus importants de l'histoire des sciences, Boltzmann propose une réinterprétation combinatoire de la notion expérimentale d'entropie : étant donne un système physique dont seuls sont mesurables les paramètres macroscopiques, on comptabilise les configurations microscopiques compatibles avec les observations; l'entropie est proportionnelle au logarithme de ce nombre énorme. Elle quantifie donc la difficulté à décrire ou deviner l'état d'un système. Un système de haute entropie est un système difficile à décrire, désordonné en un sens.

Boltzmann établit ensuite une formule pour calculer l'entropie d'un système chaotique de particules identiques, anticipant le théorème de grandes déviations de Sanov. Combinant astucieusement cette formule avec l'équation des gaz dilues, établie plus tôt par Maxwell, Boltzmann démontre son chef d'œuvre, le Théorème H, selon lequel l'entropie d'un gaz classique isole ne peut qu'augmenter au cours du temps, et finira par tendre vers l'entropie maximale qu'autorisent les contraintes.

Ces idées fondatrices étaient promises a un brillant avenir en physique, en mathématique pure autant qu'appliquée, et dans les sciences en général. On les retrouve dans des sujets aussi variés que la mécanique des fluides compressibles, les géométries non euclidiennes ou la théorie de la communication, fournissant au passage une nouvelle interprétation de la célèbre et universelle loi des erreurs, ou théorème central limite, établi par Pierre-Simon de Laplace.

Les travaux de Boltzmann suscitaient aussi de nombreux problèmes intéressants en physique des gaz, dont celui d'estimer la vitesse d'augmentation de l'entropie, et donc la vitesse à laquelle le gaz tend vers un état d'équilibre gaussien.

J'ai travaillé des années durant sur cette question, avec, entre autres, Giuseppe Toscani et Laurent Desvillettes; une étape clé était la solution d'une conjecture de Carlo Cercignani selon laquelle la production instantanée d'entropie dans un gaz dilue homogène est au moins proportionnelle au défaut d'entropie par rapport à l'état d'équilibre.

Le premier éclair remontant a la résolution de cette conjecture m'apparut alors que, jeune thésard, je rendais visite à Toscani et qu'il m'avait proposé de tester l'une de ces idées; je m'aperçus vite de la grande naïveté de cette idée, mais au cours de cette vérification était apparu un calcul dont l'élégance m'avait surpris. Cela, ai-je pense, est trop beau pour être inutile. De fait, c'était le début de la solution.

En analysant les mécanismes de production d'entropie, nous nous heurtions a de formidables difficultés quant à la régularité des solutions de l'équation de Boltzmann; c'est un problème ouvert fameux que de prouver que ces solutions sont lisses, c'est a dire infiniment dérivables, régulières, avec des taux d'accroissement finis, des taux d'accroissement des taux d'accroissement finis, et ainsi de suite. Les mathématiciens n'ont guère progresse dans ce problème; en fait, comme pour les équations non linéaires de la mécanique des fluides, il semble que nous ayons de moins en moins de convictions en la matière. Ainsi, des travaux récents de Yan Guo et ses collaborateurs montrent que l'effet des parois sur la régularité du gaz est encore plus subtil et dangereux que nous ne le croyions. Mais quoi qu'il en soit, l'estimation de la vitesse de convergence dans l'équation de Boltzmann, même pour des solutions lisses, s'est avérée conceptuellement riche, et a grandement améliore notre compréhension des phénomènes de stabilisation, de relaxation pour des équations faiblement dissipatives, linéaires et non linéaires.

Dans ces exemples comme dans bien d'autres, la stabilisation découlait naturellement de la croissance implacable de l'entropie; cette vision boltzmannienne fut communément admise dès la confirmation des théories atomistes, au début du vingtième siècle. C'est pourquoi cela fut une surprise immense quand Lev Landau, dans les années 1940, suggéra qu'une relaxation spontanée pouvait intervenir sans pour autant que l'entropie augmente. Il pensait aux plasmas, dont la dynamique est dominée par le mouvement rapide des électrons qui n'entrent que très rarement en collision.

Pour apprécier l'étonnement suscite par ce que l'on appelle maintenant l'amortissement Landau, rappelons qu'à notre échelle, autour de nous, nous avons l'habitude de deux facteurs de stabilité majeurs. L'un est la forte gravite terrestre, qui entraine tous les objets dans la même direction; l'aventure du robot Philea nous a rappelé il y a quelques jours combien il est dur de se stabiliser en faible gravite. Le second est fait de processus irréversibles en tout genre : frottements, collisions microscopiques, viscosité. Or dans le cas d'un plasma, l'action de tous ces facteurs est presque négligeable; et pourtant, selon Landau, il y a atténuation spontanée des perturbations électriques dans ce plasma.

Landau se basait sur la résolution exacte d'une équation linéaire, obtenue selon le procédé habituel de linéarisation autour d'un équilibre, en négligeant les perturbations d'ordre 2 et plus, les perturbations non linéaires. La justification théorique de cette équation simplifiée pose cependant des difficultés considérables. L'une tient à la façon de mesurer la taille des perturbations; une autre a la propension de l'équation des plasmas -- équation de Vlasov -- a engendrer des oscillations extrêmement rapides dans la distribution des vitesses des électrons. George Backus, des 1960, notait que, du fait de ces oscillations, les termes d'ordre 2 semblaient pouvoir croitre et dépasser en amplitude les termes linéaires, au bout d'un temps suffisamment long, rendant ainsi caduque l'approximation linéaire et l'argument de Landau.

D'autre part, ce sont précisément ces oscillations rapides qui sont source de l'amortissement observe, de la même façon qu'une tension électrique variant trop rapidement apparaitra constante a un oscilloscope.

L'intuition peut ainsi facilement être mise en défaut sur ce problème, et jusque tout récemment, on trouvait des physiciens pour argumenter que la convergence vers l'équilibre était bien plus lente dans l'équation des plasmas non linéaire, la "vraie équation", que dans l'équation des plasmas linéarisée, le modèle simplifie utilise par Landau.

En 2010 Clément Mouhot et moi-même avons tranche cette question, après deux ans de lutte acharnée avec l'équation non linéaire, en montrant que pour des perturbations suffisamment régulières, il y a une convergence spontanée vers l'équilibre, a une vitesse presque aussi grande que celle qui est prédite par la théorie linéarisée. Pour faire court : Landau avait raison. Cependant certains des ingrédients clés de la preuve étaient inconnus a l'époque de Landau; ils se sont révélés riches d'enseignement.

L'un de ces ingrédients est un lien mathématique profond et inattendu unissant l'amortissement Landau à deux autres phénomènes paradoxaux de la mécanique classique moderne. D'une part, le théorème de Kolmogorov, selon lequel un système mécanique intégrable, perturbe par une petite loi d'interaction, peut rester stable pour presque toutes les conditions initiales, sans qu'il y soit contraint par aucune loi -- ce serait le cas d'un système solaire idéal dont les planètes seraient minuscules. D'autre part, l'expérience de l'écho plasma, dans laquelle un plasma excite par deux impulsions électriques successives de fréquences différentes engendrera une réponse électrique spontanée, l'écho, a un instant ultérieur. Cela traduit une tendance du plasma a réagir avec retard, qui est cruciale dans la preuve de stabilité.

Au point de vue physique, le mécanisme clé de l'amortissement Landau est la relaxation par mélange, lie à la diversité des vitesses des particules, en présence de confinement et de régularité. Il est notable que la régularité revienne s'inviter dans ce problème, de manière encore plus directe et profonde que pour l'équation de Boltzmann. En fait, même au niveau linéaire, la décroissance du champ électrique dans un plasma dépend directement de la régularité de la distribution électronique; et l'équation convertit une décroissance dans l'espace des fréquences, mesure a priori invisible de régularité dans l'analyse de Fourier, en une décroissance temporelle observable, physiquement mesurable.

Nous mettons en évidence une régularité particulière, qui semble critique pour l'observation de l'amortissement Landau non linéaire; cette régularité, dite Gevrey-3, correspond a une décroissance de la transformée de Fourier comme une exponentielle de la fréquence a la puissance 1/3. Cela aussi était inattendu. Le rôle omniprésent de la régularité, à la fois comme moteur et comme limitation de la relaxation, pose de nombreuses questions puisque la régularité est réputée être un phénomène rare dans la nature.

Par ailleurs le théorème ne s'applique qu'a des perturbations fort petites; et nous n'avons encore aucune idée de la façon de justifier, rigoureusement ou heuristiquement, les effets de relaxation rapide, ou relaxation violente, que l'on observe souvent dans l'évolution a entropie constante des plasmas ou, comme le rapportent les astronomes, des galaxies hors d'équilibre.

Notre résultat démontré cependant, avec à la fois la rigueur d'un vrai théorème mathématique et la légitimité d'un vrai modèle physique, qu'une relaxation vers l'équilibre peut s'effectuer sans augmentation d'entropie.

Nos idées et méthodes ont été reprises et améliorées par Jacob Bedrossian et Nader Masmoudi pour résoudre un problème de mécanique des fluides, faussement simple, qui avait été pose il y a plus d'un siècle : la stabilité de l'écoulement de Couette pour un fluide incompressible, visqueux, bidimensionnel, dont le profil des vitesses est linéaire. Il s'agit là d'un bel exemple du principe bien connu selon lequel un concept mathématique peut s'incarner dans de nombreux systèmes différents.

Ces relations harmonieuses et souvent surprenantes entre mathématique et physique, ou entre domaines mathématiques différents, ont constitué pour moi une inspiration constante, que ce soit en compagnie des auteurs du passe, de mes maitres, Pierre-Louis Lions, Yann Brenier, Eric Carlen et Michel Ledoux, ou de mes collaborateurs, élèves et collègues, a Lyon, à Paris, et partout dans le monde, qui tous méritent mes remerciements chaleureux pour les belles aventures que j'ai pu vivre avec eux.

Je vous adresse également mes remerciements pour votre attention.

Cédric Villani