Discours prononcé par Jean-Pierre Kahane le 28 juin 1999
lors de la séance solennelle de réception des nouveaux Membres

Un parcours sur cinquante ans

Pour me présenter, j'ai pensé à vous dire, en paraphrasant Laurent Schwartz, comment je me voyais en prise avec le siècle. Chacun a sa vision des grands problèmes du monde présent et à venir, et la mienne a inspiré mon action sur tous les plans : professionnel, syndical, politique. Mais, si attentive que soit l'Académie aux interactions entre science, société et politique, ce n'est pas à ce titre qu'elle m'a élu en son sein. Je me bornerai donc à mon parcours de mathématicien.

Je dois beaucoup à l'École Normale. J'ai eu des professeurs remarquables, parmi lesquels Henri Cartan. Mais je pense d'abord à l'influence de mes aînés et de mes camarades. Henri Cabannes, qui ne doit pas s'en souvenir, a déterminé mon orientation et ma formation à l'enseignement en me suggérant de m'occuper du groupe d'études du certificat de Calcul différentiel et intégral ; j'étais donc une sorte de moniteur, mais élu par les étudiants ; et c'est auprès de ces étudiants que j'ai appris mon métier. Mes aînés et mes camarades m'ont introduit aux bons livres. J'ai été fasciné, comme spectateur, par l'ordre et la beauté des grandes structures de l'analyse telles que Bourbaki les avait dégagées. Mon ami Georges Poitou m'a fait cadeau du livre de Zygmund "Trigonometrical Series, un beau livre très différent. Daniel Kastler m'a fait connaître Szolem Mandelbrojt, et cela a décidé de ma carrière comme mathématicien. Quand j'ai rendu visite à Szolem Mandelbrojt, je ne connaissais rien à son oeuvre scientifique, et je n'avais jamais assisté à aucun de ses cours. C'est sa personnalité qui m'a séduit tout de suite. Avec lui, la mathématique n'avait rien d'un majestueux édifice à la Bourbaki. C'était un jardin plein de recoins cachés et de passages secrets, dans lequel il se mouvait avec une jubilation communicative. Il était un merveilleux conteur, toujours prêt à raconter une histoire ou un problème. L'un de ces problèmes m'a beaucoup inspiré. Le voici. En analyse de Fourier, on définit le spectre d'une fonction. Quelle relation y a-t-il entre le spectre et le comportement local de la fonction ? Si l'on impose au spectre d'être contenu dans un ensemble donné et à la fonction d'être très plate au voisinage d'un point, s'ensuit-il ou non que la fonction est nulle partout? C'est, dans le langage de l'époque, un problème de "quasi-analyticité". Si l'on impose à la fonction un certain type de régularité sur un intervalle, jouira-t-elle nécessairement de cette régularité partout ? J'ai apporté des réponses définitives à quelques questions de ce type quand je préparais ma thèse au CNRS. Plus tard, au milieu des années 60, Szolem Mandelbrojt, Paul Malliavin et moi nous sommes retrouvés, avec des cristallographes et des physiciens théoriciens, dans une RCP du CNRS intitulée "Problèmes mixtes sur transformées de Fourier" : "mixtes" parce qu'ils faisaient intervenir f et F, une fonction et sa transformée de Fourier; et "mixtes" également parce que plusieurs sciences interagissaient. En vérité, la relation entre f et F a occupé toute mon existence. Il y a quelques années, Jean-Marc Lévv-Leblond a ravivé mon intérêt en me proposant un problème nouveau, issu des inégalités de Heisenberg ; quand, c'est-à-dire pour quelles équations de Schrödinger, peut-on compléter l'inégalité de Heisenberg, relative à l'état fondamental, par une inégalité en sens opposé ?

Je reviens au début des années 50. Comme outil pour l'étude de la quasi-analycité, j'avais une sorte de transformée de Laplace qui permettait d'étendre la transformation de Fourier à certaines fonctions à fréquences complexes. Comme j'en parlais un jour à Bernard Malgrange, il me révéla qu'il s'agissait des fonctions moyenne-périodiques de Jean Delsarte et Laurent Schwartz, dont la théorie générale avait été publiée par Schwartz, et mon approche permettait de simplifier notablement la théorie.
Ainsi Laurent Schwartz fit-il naturellement partie de mon jury de thèse, et, comme il existait alors une seconde thèse, il me proposa d'exposer la théorie des algèbres de Gelfand. C'est une très belle théorie, qui couvre à la fois les algèbres d'opérateurs, les algèbres de fonctions, et les algèbres de convolution

dont Norbert Wiener avait fait voir l'importance en analyse harmonique. La plus simple en apparence de ces algèbres de convolution est l_1, constituée des suites sommables sur **Z**. Mais elle est en réalité très mystérieuse, et sa transformée de Fourier, constituée des fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes, était encore peu explorée. Le sujet est devenu très populaire à la fin des années 50, quand Yitchak Katznelson et Paul Malliavin ont résolu les principales conjectures et développé de nouveaux outils. Mon rôle a été d'apporter les premiers résultats, parfois inattendus, et d'introduire les premiers outils. J'étais alors à Montpellier, et un microcolloque improvisé à Montpellier en 1958 a été le point de départ de la thèse de Katznelson. J'ai découvert à cette occasion la puissance des méthodes topologiques à la Baire, pour remplacer des constructions explicites par des théorèmes d'existence, et je les ai utilisées plus tard, en beaucoup de circonstances. C'est une bonne manière d'apprivoiser les monstres, et les Polonais y étaient passés maîtres.

Raphaël Salem m'avait déjà initié à une autre manière d'apprivoiser les monstres, qui est l'utilisation des probabilités. Cela remonte à Paley et Zygmund dans les années 1930, et je pense avoir été leur principal continuateur. On peut introduire un aléa, par exemple changer au hasard les signes dans une série de fonctions. On peut aussi étudier un objet aléatoire naturel, comme le mouvement brownien. Des phénomènes inusuels dans l'analyse classique, comme la non-dérivabilité de fonctions continues, deviennent alors presque sûrs. Salem m'a révélé bien d'autres choses, comme les ensembles parfaits et les nombres spéciaux qui interviennent dans les séries trigonométriques, et il m'a poussé à écrire avec lui un livre sur le sujet. Ce livre est un herbier, rempli des plantes rares qui poussaient dans son jardin, et il est l'a écrit dans son style, clair et dépouillé, que j'ai toujours tenté de m'approprier.

Au contraire de Mandelbrojt, de Salem, de Katznelson, avec lesquels j'étais très lié, je n'ai rencontré Paul Lévy qu'en quelques occasions. Mais, avec le recul du temps, il a été mon principal inspirateur. Mon travail sur l'algèbre de Wiener a eu pour origine un article de lui, de 1934, où il posait la question des fonctions qui opèrent et donnait pour élément de réponse le théorème de Wiener-Lévy. En 1954, quand est sorti son fascicule du "Mémorial des sciences mathématiques sur le mouvement brownien", je l'ai lu avec passion, et j'ai été très heureux, vingt ans plus tard, de découvrir un phénomène qui lui avait échappé. Mais c'est mon unique visite chez lui, en 1958, qui a laissé les traces les plus durables. Il m'avait invité parce qu'il était intéressé par une notion de variables sous-gaussiennes que j'avais introduite. Puis il m'a parlé de deux sujets qui lui paraissaient dignes d'intérêt : une théorie générale des multiplications aléatoires, ce qui, à l'époque, m'a laissé indifférent, et un curieux problème de recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard, sur lequel j'ai fait immédiatement une petite contribution. Or les deux sujets sont liés, et ils m'ont beaucoup occupé depuis lors. Ils apparaissent déjà dans mon livre de 1968 sur les séries de fonctions aléatoires. Mais leur intérêt pour moi s'est renouvelé avec l'intervention de Benoît Mandelbrot. Dès la sortie de mon livre avec Salem en 1963, Benoît Mandelbrot, que je connaissais comme neveu de Szolem, m'avait dit que nous nous occupions des mêmes choses : ensembles minces, courbes irrégulières, mesures et dimensions de Hausdorff. Il avait des idées sur le lien entre processus de Lévy et intervalles au hasard ; je n'ai bien compris et élaboré ce lien qu'à la fin des années 1980, en réattaquant dans un cadre général le problème des recouvrements aléatoires. Il avait deviné que les processus de Lévy donnaient, de façon très naturelle, des ensembles de Salem. Et surtout, il liait ces questions à une vision de la turbulence à la Kolmogorov, qui l'a amené en 1974 à la mise en forme de questions de grand intérêt sur ce que l'on appelle aujourd'hui les cascades multiplicatives. La résolution de ces questions, que j'ai faite avec Jacques Peyrière, a engendré beaucoup de travaux, et est entrée en résonance avec les idées d'Uriel Frisch et Georgio Parisi sur l'analyse multifractale. Les produits de poids aléatoires indépendants ont été mon principal sujet d'étude entre 1985 et 1990, et ils constituent maintenant une théorie unifiée. Ils font apparaître des mesures aléatoires qui, outre la turbulence, sont susceptibles d'un grand nombre d'interprétations, et sont une mine de problèmes.

Ainsi, j'associe Benoît à son oncle, parmi les mathématiciens qui m'ont le plus influencé. J'ai parlé de Schwartz, de Salem, de Paul Lévy, de Katznelson avec lequel j'ai beaucoup collaboré, de Malliavin, mais je n'ai pas beaucoup parlé de mes élèves et de mes continuateurs. Il y en a beaucoup, beaucoup sont très bons et chacun mériterait le temps que j'ai passé à parler de moi.

Un mathématicien que je veux évoquer pour finir est le Suédois Arne Beurling. C'était un grand mathématicien et un homme difficile. J'ai toujours eu de bons rapports avec lui parce que nous n'avons jamais collaboré. Mais j'avais décidé de lui soutirer pour publication ses papiers secrets, et c'est grâce à moi que certains de ses travaux sont connus. Il y a deux ans, j'ai contribué à sa mémoire en complétant sur un point délicat sa théorie des nombres premiers généralisés, qui est un point de contact entre analyse harmonique et théorie des nombres.

J'achève ce je voulais vous dire de mon parcours de mathématicien. Je suis un mathématicien professionnel, un bon artisan des mathématiques. Mais je suis aussi un amateur : j'aime découvrir ce que font les autres, et j'aime aussi papillonner. A mon âge, je serai de moins en moins professionnel. J'espère être de plus en plus un amateur, un amateur de tout ce qu'il y a de beau et d'utile dans les mathématiques d'autrefois et d'aujourd'hui.