Cérémonie du 29 mai 2018

Allocution d'Alice Guionnet
Le monde des matrices aléatoires

Élue dans la section de Mathématique

Je suis extrêmement honorée d'être reçue aujourd'hui à l'Académie, après tant de scientifiques prodigieux. Parmi tous ces grands savants, Pierre-Simon Laplace a particulièrement inspiré ma trajectoire scientifique et il sera mon point de départ pour vous décrire mon parcours. Pierre Simon-Laplace, élu en 1773 (à seulement 24 ans !) à l'Académie royale des sciences, est considéré comme l'un des pères des probabilités. Il faut rappeler que les probabilités sont une science mathématique relativement jeune. C'est au seizième siècle que l'on peut faire remonter leur naissance, dans les travaux de Cardano, puis dans une correspondance entre Fermat et Pascal, tous trois souhaitant répondre à des questions de jeux de hasard. Il faut attendre le dix-huitième siècle pour que Bernoulli et de Moivre découvrent que le lancer d'une pièce est susceptible d'être décrit par des lois. Même si ce lancer est aléatoire, on peut prédire ce qui se passe quand on effectue de nombreux lancers. Bernoulli montre ainsi que si un joueur jette une pièce un grand nombre de fois, il verra apparaître, avec une grande probabilité, le côté pile environ la moitié des fois. Ce comportement moyen qui émerge, c'est ce que l'on appelle la loi des grands nombres. De Moivre, de son côté, montre comment il est possible, grâce à la courbe gaussienne, de préciser la probabilité de s'éloigner de cette moyenne : c'est le théorème central limite. Les preuves de Bernoulli et de Moivre sont combinatoires, basées sur le décompte des configurations faisant apparaitre le côté pile. Ces résultats sont bien sûr importants mais ils seraient peut-être restés cantonnés aux pièces de monnaie si Laplace ne leur avait pas donné une dimension beaucoup plus grande. Laplace montre en effet en 1809 que le théorème central limite reste vrai dans des situations beaucoup plus générales, dès lors qu'on répète une expérience de façon indépendante. Sa preuve est totalement différente, basée sur l'analyse. Grâce à l'universalité de son résultat, il applique sa théorie à des questions de la vie civile telles que la démographie. Depuis, l'idée que l'on peut maîtriser l'inconnu en le modélisant par une distribution de probabilité s'est résolument ancrée dans notre société, notamment par le

biais des statistiques. Elle a gagné de nombreuses sciences comme la biologie, l'informatique, ou la médecine.
C'est le cœur même de ma recherche que d'étudier des problèmes où interviennent un grand nombre d'éléments aléatoires, pour en trouver le comportement moyen typique, comprendre la probabilité de faire une erreur par rapport à ce comportement limite, voire estimer la probabilité d'observer un comportement moyen totalement différent.

J'ai commencé ma recherche en mécanique statistique, au carrefour des probabilités et de la physique. La mécanique statistique est fondée sur la volonté de comprendre les phénomènes qui nous entourent en modélisant les interactions physiques des petites particules qui composent la matière. Comme dans un jeu du pile ou face, à partir du désordre microscopique on cherche à extraire un comportement macroscopique, qui est, lui, bien déterministe. J'ai effectué ma thèse sous la direction de Gérard Ben Arous, dont l'enthousiasme communicatif et la curiosité m'ont été précieux tout au long de ma carrière. Je me suis intéressée alors à l'évolution des verres de spins. Il s'agissait de comprendre pourquoi ces matériaux vieillissent dans la mesure où ils évoluent sur des échelles de temps très longues sans jamais atteindre leur état d'équilibre. J'ai par exemple pu démontrer ce phénomène pour un modèle très simple, dit sphérique. Pour mener à bien cette analyse, j'ai été amenée à étudier plus précisément les coefficients de l'interaction des spins : c'est un tableau de coefficients aléatoires dont la dimension est très grande, voire tend vers l'infini. C'était ma première rencontre avec les grandes matrices aléatoires. Elles occupent aujourd'hui toute ma recherche, centrée sur les multiples facettes de ce magnifique objet mathématique issu des probabilités et de l'algèbre linéaire.

Les matrices aléatoires sont apparues naturellement par le biais de leurs applications. Dès 1928, Wishart les définit en cherchant à analyser un grand tableau de données, intégrant la possibilité que ces données soient bruitées. Elles sont réapparues dans les années cinquante en physique nucléaire dans les travaux de Wigner pour modéliser le hamiltonien de noyaux lourds. Elles se retrouvent aujourd'hui dans de nombreux domaines de la physique et des mathématiques, mais aussi dans des domaines plus appliqués comme les télécommunications ou l'acquisition comprimée.

L'étude des propriétés des grandes matrices aléatoires est un sujet passionnant, en plein essor. Les premières matrices étudiées avaient des coefficients gaussiens, ce qui leur confère plus de symétrie et en particulier permet de donner des formules explicites pour la distribution des valeurs propres. Cela a permis d'étudier précisément ces valeurs propres, entre les années cinquante où Wigner étudia leur répartition moyenne, jusqu'à Tracy et Widom qui précisèrent les fluctuations des valeurs propres extrêmes dans les années quatre-vingt-dix. Mais que peut-on dire si on change un peu la matrice ? Quelles sont les matrices qui montrent des comportements résolument différents ? Comment se fait-il que des systèmes qui n'ont à priori rien à voir avec les matrices aléatoires, comme des pavages choisis au hasard, fluctuent de façon similaire ? Est-ce que des matrices prises au hasard ont en général de bonnes propriétés ? Quelle est la probabilité qu'une matrice aléatoire ait un comportement atypique comme une valeur propre anormalement grande ? Autant de questions qui ont alimenté et continuent à alimenter ma recherche.

Une autre de mes lignes de recherche est d'utiliser les matrices aléatoires dans le domaine des algèbres d'opérateurs, un sujet à priori éloigné des probabilités. Le lien se fait néanmoins aisément lorsqu'on considère deux matrices aléatoires et l'algèbre des mots qu'elles engendrent. Voiculescu a montré que deux matrices aléatoires indépendantes sont asymptotiquement libres, établissant ainsi un pont avec la théorie des groupes libres. Les matrices aléatoires sont depuis devenues un outil important pour étudier la notion de liberté. Par exemple, afin de mesurer la liberté, Voiculescu a introduit plusieurs entropies. L'une d'entre elles, basée sur les matrices aléatoires, est similaire à l'entropie de Boltzmann qui mesure le nombre d'états microscopiques pour un état macroscopique donné. En utilisant des outils de la théorie des grandes déviations, j'ai pu comparer ces entropies. Les matrices aléatoires permettent d'adapter de nombreux autres concepts de l'analyse classique comme le transport, le mouvement brownien ou les inégalités fonctionnelles, au cadre non-commutatif et ainsi de traiter des questions centrales en algèbres d'opérateurs.

Si j'ai évoqué Laplace au début de mon intervention, c'est qu'il y a une trentaine d'années l'étude des matrices aléatoires était cantonnée à des cas bien particuliers, dont les symétries permettaient une analyse spécifique, comme le pile ou face. Depuis 30 ans, les chercheurs sont partis à la découverte du monde des matrices aléatoires et, comme Laplace, ont élargi l'horizon en cherchant à dégager leurs propriétés universelles. Ce domaine reste largement inexploré et porteur de nombreux défis mathématiques. J'espère pouvoir en relever certains avec mes collaborateurs que je remercie vivement du chemin déjà parcouru.